اشتقاق الدوال المثلثية

- ص = جا س ← صَ = جتا س
- ص = جتا س ← صَ = ـ جا س
- ص = ظا س ← صَ = قا^{٢}س
- ص = قا س ← صَ = قا س ظا س
- ص = قتا س ← صَ = ـ قتا س ظتاس
- ص = ظتاس ← صَ = ـ قتا^{٢}س

- ص = جا(٣س ـ ٥) ← صَ = ٣جتا (٣س ـ ٥)
- ص = جتا^{٣} س ← صَ = ٣جتا^{٢}س X ـ جا س = ـ ٣جتا^{٢}س جا س
- ص = ظتا٦س^{٣} + ظتا^{٣} ٦س

الحل صَ = ـ قتا^{٢} ٦س^{٣}X١٨س^{٢} + ٣ ظتا^{٢}٦سX ـ قتا^{٢} ٦سX٦

معادلة المماس والعمودي

- ميل الخط المستقيم = فرق الصادات / فرق السينات ← لو معاك زوجين مرتبين
- ميل الخط المستقيم = ـ معامل س / معامل ص ← ٢س + ٣ص = ٥ ← الميل = $\frac{-٢}{٣}$
- ميل الخط المستقيم = ظا هـ ← حيث هـ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
- ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر
- ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات غير معرف

- المستقيمان المتوازيان ← م$_{١}$ = م$_{٢}$
- المستقيمان المتعامدان ← م$_{١}$ X م$_{٢}$ = ـ ١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المعادلة العامة للخط المستقيم

نقطه
ميل

$$\frac{ص - ص_{1}}{س - س_{1}} = م$$

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) وميله $\frac{١}{٢}$

الحل

$$\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$$

$٢ص - ٦ = س - ٢$ ← $٢ص - ٦ - س + ٢ = ٠$

$٢ص - س - ٤ = ٠$

س أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويقطع من محور الصادات جزءاً سالباً طوله ٥ وحدات.

الحل

$ص = م س + حـ$ ← $ص = ٢س + ٥$

س أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طولهما ٤ ، ٥ على الترتيب.

الحل

$$\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٥} = ١$$ ← $$\frac{س}{P} + \frac{ص}{ب} = ١$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س أوجد معادلة المماس والعمودي على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص = ٢$ عند النقطة $(-١ ، ٣)$ الواقعة عليه.

الحل

$٢س + ٢ص ص_{١} - ٤ + ٢ ص_{١} = ٠$ بالتعويض بالنقطة $(-١ ، ٣)$

$-٢ + ٦ص_{١} - ٤ + ٢ ص_{١} = ٠$

$٨ ص_{١} = ٦ \Leftarrow ص_{١} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المماس :

$$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{٣}{٤}$$

$٤ص - ١٢ = ٣س + ٣$

$٤ص - ١٢ - ٣س - ٣ = ٠$

$٤ص - ٣س - ١٥ = ٠$

معادلة العمودي :

$$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = \frac{-٤}{٣}$$

$$\frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{-٤}{٣}$$

$٣ص - ٩ = -٤س - ٤$

$٣ص - ٩ + ٤س + ٤ = ٠$

$٣ص + ٤س - ٥ = ٠$

س أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٢} - ٤س + ٣$ والتي عندها يكون المماس للمنحنى موازياً لمحور السينات.

الحل

يوازي محور السينات ∴ ميل المماس = صفر ∴ المشتقة الأولى = صفر

$ص_{١} = ٢س - ٤ = ٠$

$س = ٢$ بالتعويض في معادلة المنحنى:

$ص = ٤ - ٨ + ٣ = -١$

النقطة $(٢ ، -١)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الاشتقاق الضمني والبارامتري

العلاقة الصريحة ← $ص = ٥ س^{٣} + ٤$

العلاقة الضمنية ← $٢ ص^{٢} س + ٢ س = ٠$

الاشتقاق الضمني

س أوجد $\frac{و ص}{و س}$ لكل من: $س^{٢} - ٤ ص^{٢} + ٧ = ٠$

الحل

$٢ س - ٨ ص ص' = ٠$

$\frac{٢ س}{٨ ص} = \frac{٨ ص ص'}{٨ ص}$

$ص' = \frac{٢ س}{٨ ص}$ $\quad ص' = \frac{س}{٤ ص}$

$\frac{و ص}{و س} = \frac{س}{٤ ص}$

س أوجد $\frac{و ص}{و س}$ لكل من: $س^{٢} - ٤ س ص - ٣ ص^{٢} - ٢ س = ٣$

الحل

$٢ س - (٤ س ص' + ٤ ص) - ٦ ص ص' - ٢ = ٠$

$٢ س - ٤ س ص' - ٤ ص - ٦ ص ص' - ٢ = ٠$

$- ٤ س ص' - ٦ ص ص' = ٤ ص - ٢ س + ٢$ $\quad (÷ - ٢)$

$+ ٢ س ص' + ٣ ص ص' = س - ٢ ص - ١$

$ص' (٢ س + ٣ ص) = س - ٢ ص - ١$

$ص' = \frac{س - ٢ ص - ١}{٢ س + ٣ ص}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الاشتقاق البارامتري

س $س = ن^{٢} + ٥ن - ١٤$ ، $ص = ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ن - ٢$

اوجد $\frac{وص}{وس}$ عندما $ن = ١$

الحل

$$\frac{وص}{وس} = \frac{وص}{ون} \div \frac{وس}{ون}$$

$$\frac{وص}{ون} = ٣ن^{٢} - ٤ن + ١ \qquad \frac{وس}{ون} = ٢ن + ٥$$

$$\frac{وص}{وس} = \frac{٣ن^{٢} - ٤ن + ١}{٢ن + ٥} \quad (\text{وعندما } ن = ١) \quad \frac{وص}{وس} = \frac{٣ - ٤ + ١}{٢ + ٥} = \frac{\text{صفر}}{٧} = \text{صفر}$$

س $س = ٢جتا^{٣}\theta$ ، $ص = ٥جا^{٣}\theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

الحل

$$\frac{وص}{وس} = ١٥جا^{٢}\theta \, جتا\theta \quad ، \quad \frac{وس}{وس} = ٦جتا^{٢}\theta \times -جا\theta$$

$$\frac{وص}{وس} = \frac{١٥جا^{٢}\theta \, جتا\theta}{-٦جتا^{٢}\theta \times جا\theta} = \frac{-١٥}{٦} ظا\theta$$

عندما $\theta = \frac{\pi}{٤}$ ← $\frac{وص}{وس} = \frac{-١٥}{٦} \times ظا٤٥ = \frac{-١٥}{٦} = \frac{-٥}{٢}$

س أوجد مشتقة $٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٥$ بالنسبة إلى $٣س^{٢} + ٧$

الحل

نفرض أن: $ص = ٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٥$ ، $ع = ٣س^{٢} + ٧$

والمطلوب $\frac{وص}{وع} = \frac{وص}{وس} \times \frac{وس}{وع} = \frac{وص}{وس} \div \frac{وع}{وس}$

$$\frac{وص}{وس} = ١٢س^{٢} - ١٨س \quad \therefore \frac{وص}{وع} = \frac{١٢س^{٢} - ١٨س}{٦س} = \frac{٦س(٢س - ٣)}{٦س} = ٢س - ٣$$

$$\frac{وع}{وس} = ٦س$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المشتقات العليا للدالة

ص = ٥ س^{٤} + ٣ س^{٣} + ٧ س^{٢} + ١٠

ص$'$ = ٢٠ س^{٣} + ٩ س^{٢} + ١٤ س ⟸ $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$

ص$''$ = ٦٠ س^{٢} + ١٨ س + ١٤ ⟸ $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$

ص$'''$ = ١٢٠ س + ١٨ ⟸ $\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}}$

ص$^{(٤)}$ = ١٢٠

ص$^{(٥)}$ = صفر

لاحظ أن

الدالة كانت من الدرجة الرابعة (كثيرة حدود)

فإن المشتقة الرابعة = ثابت ، والمشتقة الخامسة = صفر

مثال إذا كانت ص^{٢} = س^{٢} (٤ − س) اثبت أن ص $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ + ($\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$)^{٢} + ٣س = ٤

الحل

ص^{٢} = ٤ س^{٢} − س^{٣}

بالاشتقاق بالنسبة لـ (س) ∴ ٢ ص $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ = ٨ س − ٣ س^{٢} (÷ ٢)

ص $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ = ٤س − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} ⟸ بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

ص $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ + $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ × $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ = ٤ − ٣س

∴ ص $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ + ($\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$)^{٢} + ٣ س = ٤

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال إذا كانت $ص = \frac{١٠ - جتا س}{س}$ اثبت أن $س \frac{و^٢ ص}{و س^٢} + ٢ \frac{و ص}{و س} = جتا س$

الحل

اعمل مقص ✂ $س ص = ١٠ - جتا س$ ⟸ بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

$س \frac{و ص}{و س} + ص = جا س$ ⟸ بالاشتقاق مرة اخرى بالنسبة لـ (س)

$س \frac{و^٢ ص}{و س^٢} + \frac{و ص}{و س} + \frac{و ص}{و س} = جتا س$

$\therefore س \frac{و^٢ ص}{و س^٢} + ٢ \frac{و ص}{و س} = جتا س$

■ إذا كانت $ص = جا أ س$ ، $ص = جتا أ س$

$ص^{(ن)} = أ^ن ص$ ⟸ لو ن يقبل القسمة على ٤

$ص^{(ن)} = -أ^ن ص$ ⟸ لو ن لا يقبل القسمة على ٤ } زوجية

لو ن فردى ⟸ هات المشتقة اللي قبله على طول وبعدين اشتقها تاني

$ص = س^ن$ $\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ن ل_م س^{ن-م}$ ، $ن \geq م$ إذا كانت $ن < م$ $= صفر$ $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$

س $ص = س^{٢٠}$

الحل

$ص^{(٥)} = ٢٠ ل_٥ س^{١٥}$

$ص^{(٢٠)} = ٢٠ ل_{٢٠} س^{٠} = \underline{|٢٠}$ $ص^{(١٢)} = ٢٠ ل_{١٢} س^{٨}$ ، $ص^{(٢١)} = صفر$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مشتقة الدوال الأسية واللوغاريتمية

د(س) = هـ^٥س^٢ ⟸ د′(س) = ١٠س هـ^٥س^٢

الدالة نفسها × مشتقة أسها لو الأساس هـ

د(س) = ٥^٣س^٢ ⟸ د′(س) = ٦س ٥^٣س^٢ × لو_هـ ٥

الدالة نفسها × مشتقة أسها × لو_هـ ﺃ لو الأساس ﺃ حيث ﺃ ثابت

س ص = (٣س − ١) هـ^ظاس

الحل

ص′ = (٣س − ١) × قا^٢س هـ^ظاس + هـ^ظاس × ٣

ص′ = هـ^ظاس (٣س − ١) قا^٢س + ٣)

مشتقة الدوال اللوغاريتمية

د(س) = لو_هـ س ⟸ د′(س) = ١ / س

مشتقتها / الدالة لو الأساس هـ

س د(س) = لو_٣ س

الحل

د′(س) = ١ / (س لو_هـ ٣) = ١ / س لو_هـ ٣

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س ص = لو (٣ س^{٢} + ٥)

الحل

$$ص' = \frac{٦س}{(٣س^{٢} + ٥) \text{ لو}_{هـ} ١٠} = \frac{٦س}{٣س^{٢} + ٥} \text{ لو}_{هـ}$$

س ص = لو$_{هـ}$ | س^{٢} − ١ |

الحل

$$ص' = \frac{٢س}{س^{٢} - ١}$$

س ص = س^{س}

الحل

بأخذ لو$_{هـ}$ للطرفين لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ س^{س}

لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ س

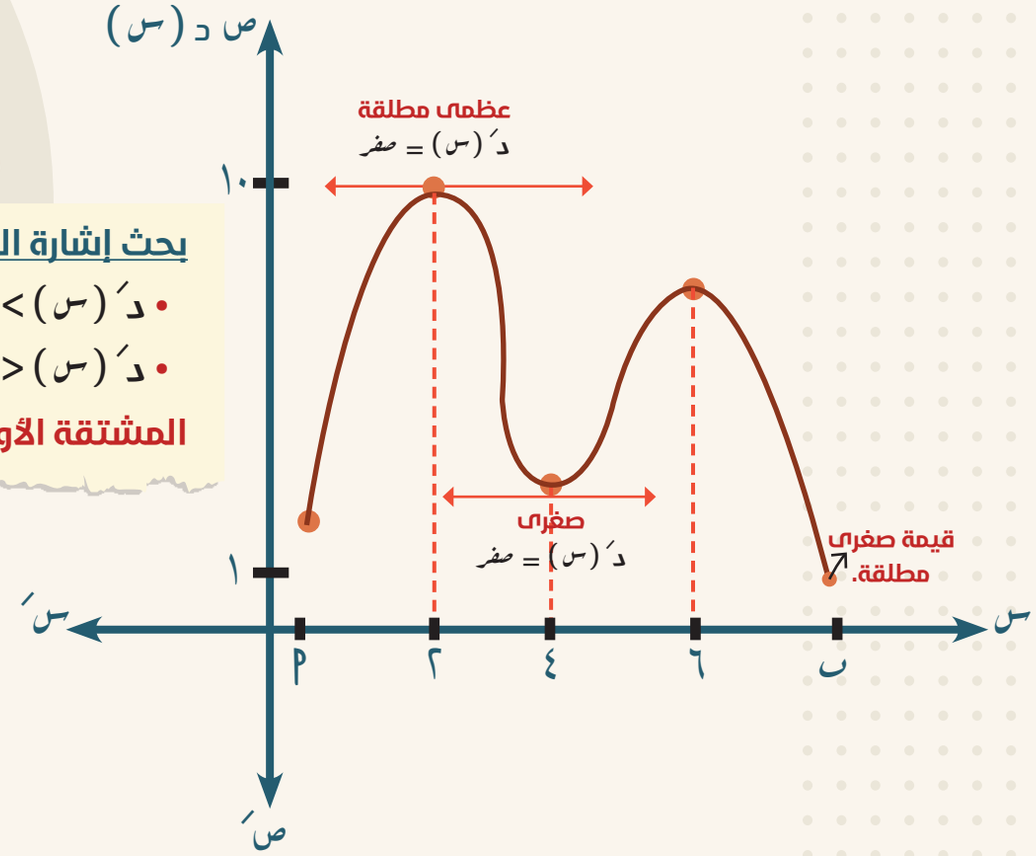
$$\frac{ص'}{ص} = \cancel{س} \times \frac{١}{\cancel{س}} + \text{لو}_{هـ} س \quad (\times ص) \Longleftarrow ص' = س^{س} + س^{س} \text{ لو}_{هـ} س$$

التزايد والتناقص

بحث إشارة المشتقة

- د′ (س) > صفر تزايد
- د′ (س) < صفر تناقص

المشتقة الأولى سالب ⟸ تناقص



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

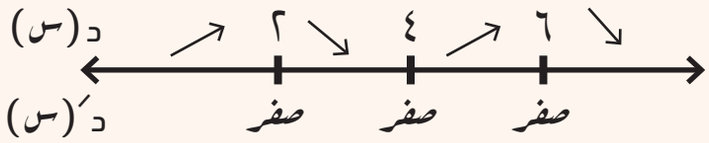
النقطة الحرجة

لازم ∋ لمجال الدالة

- د′ (س) = صفر
- د′ (س) غير موجودة

القيمة العظمى: تفصل بين تزايد وتناقص.

القيمة الصغرى: تفصل بين تناقص وتزايد.



القيمة الصغرى والعظمى المطلقة من الفترة [م ، ب]

بداية الفترة د(م) = (بعوض في الدالة)

نهاية الفترة د(ب) = (بعوض في الدالة)

التحدب ⟸ مشتقة ثانية ⟸ د″ (س) = صفر

نقطة الانقلاب

بين نقطة عظمى محلية وصغرى محلية.

مثلاً: عظمى = ٢ ، صغرى = ٤

هتكون نقطة انقلاب = ٣ ⟸ في المنتصف .

- د″ (س) = صفر ← نقطة انقلاب

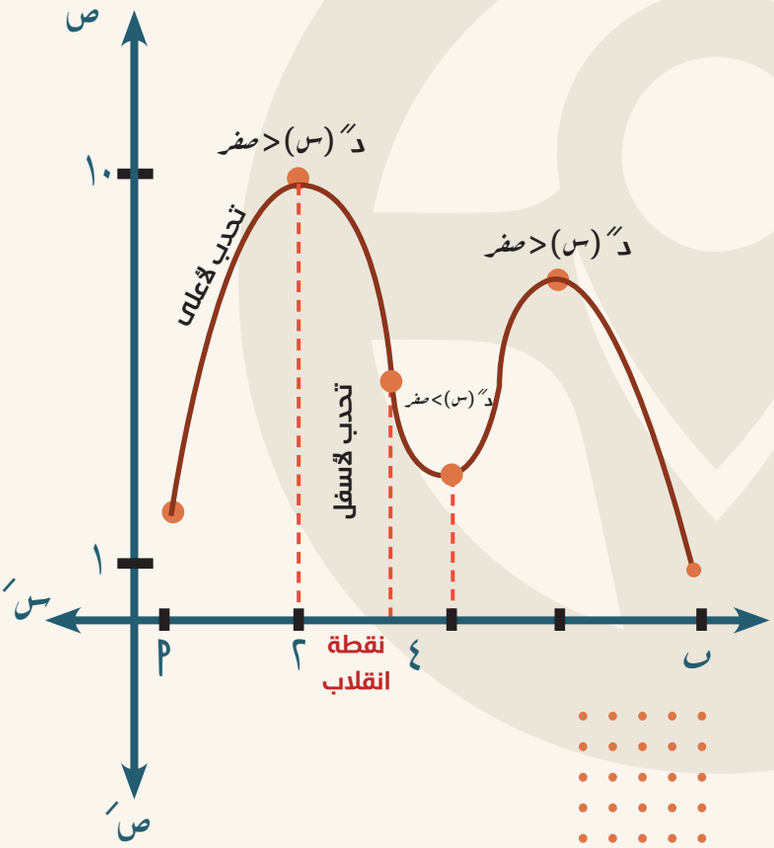
د″ (س) غير موجودة

نقطة الانقلاب

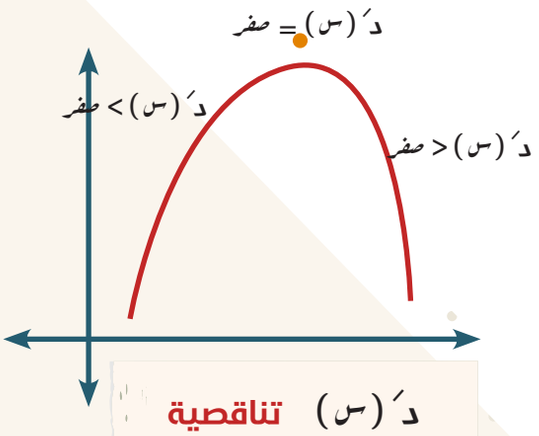
١ لازم ∋ لمجال الدالة

٢ الدالة قابلة للاشتقاق

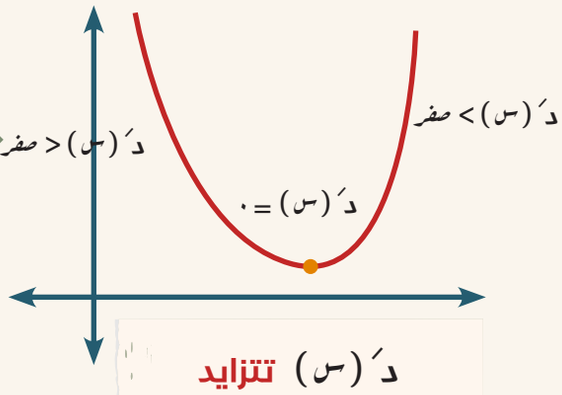
٣ تفصل بين تحدبين.



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK



د´(س) تناقصية
التحدب لأعلى
د´´(س) < صفر



د´(س) تتزايد
التحدب لأسفل
د´´(س) > صفر

مثال ادرس تحدب منحنى الدالة د(س) = س|س − ٢| وأوجد نقاط الانقلاب إن وُجدت.

الحل

$$د(س) = \begin{cases} س(س-٢) & س \geq ٢ \\ س(٢-س) & س < ٢ \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س & س \geq ٢ \\ ٢س - س^{٢} & س < ٢ \end{cases}$$

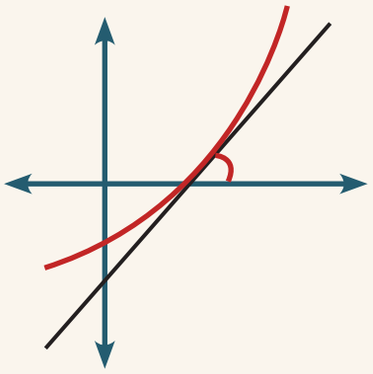
$$د´(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & س > ٢ \\ \text{غير مجودة} & س = ٢ \\ ٢ - ٢س & س < ٢ \end{cases}$$

$$د´(٢^{+}) = ٢ \qquad د´(٢^{-}) = -٢$$

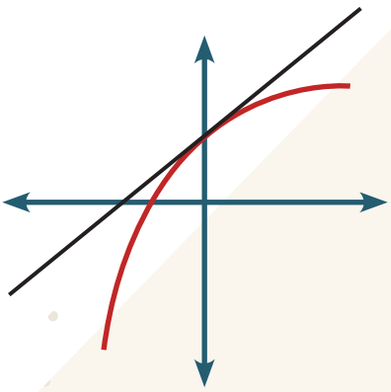
$$د´´(س) = \begin{cases} ٢ & س > ٢ \\ \text{غير مجودة} & س = ٢ \\ -٢ & س < ٢ \end{cases}$$

لا يوجد نقطة تنقلاب

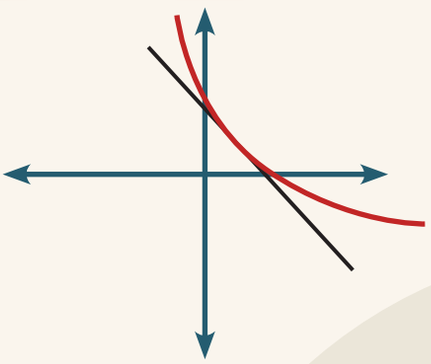
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK



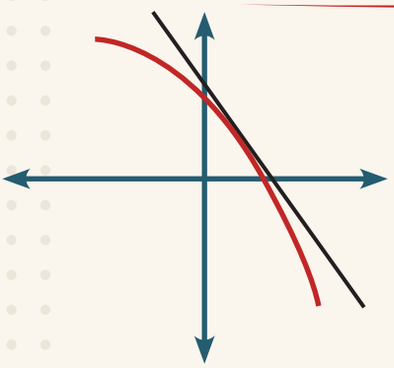
د′ (س) > صفر
د″ (س) < صفر



د′ (س) > صفر
د″ (س) > صفر



د′ (س) < صفر
د″ (س) < صفر



د′ (س) < صفر
د″ (س) > صفر

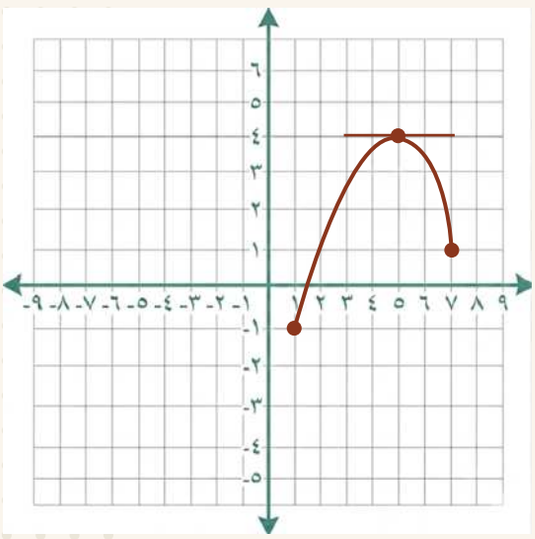
مثال

ارسم شكل عاماً لمنحنى د إذا علمت أن

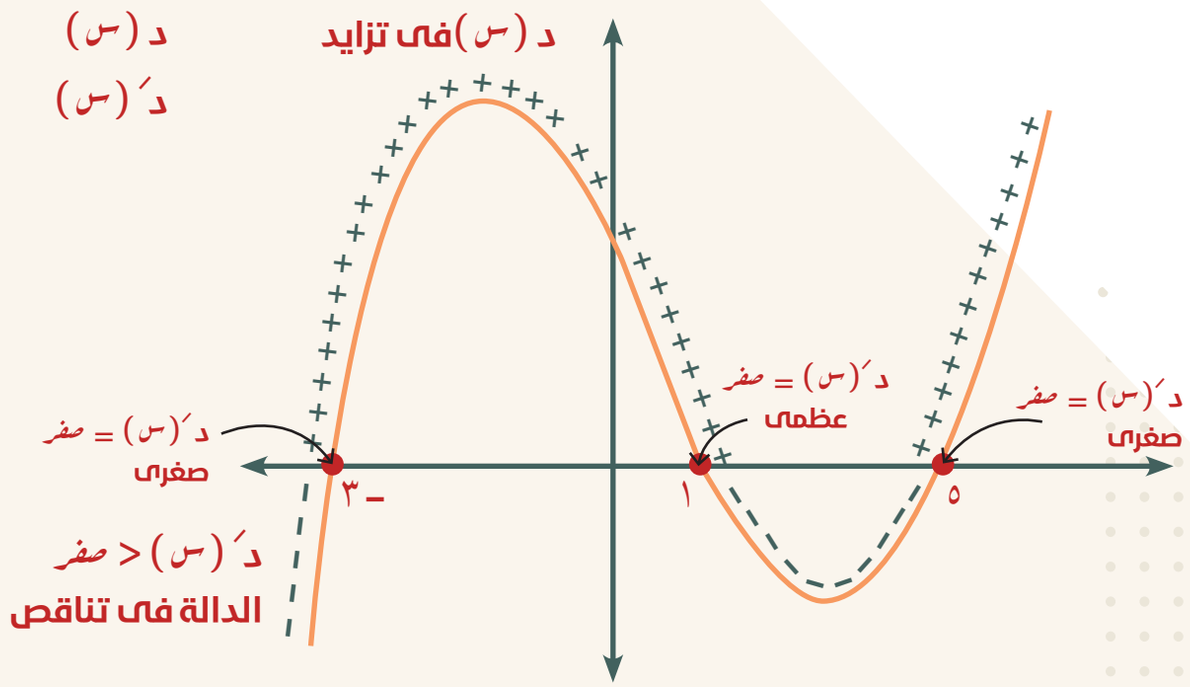
١) [١ ، ٧] د(١) = −١ ، د(٥) = ٤ ، د(٧) = ١

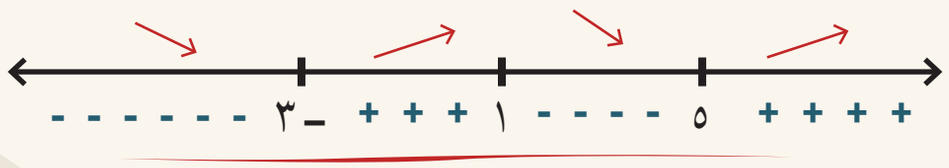
٢) د′(٥) = صفر ، د′(س) > صفر س < ٥ ، د′(س) < صفر س > ٥

٣) د″(س) > صفر عندما ١ < س < ٧



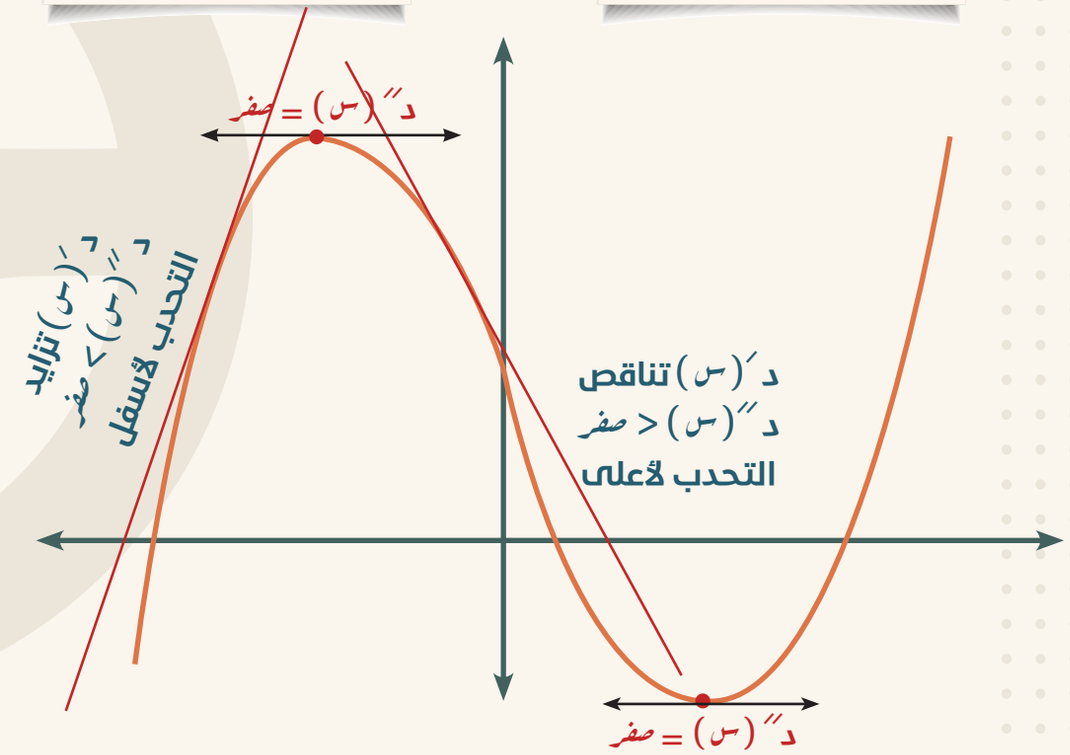
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK





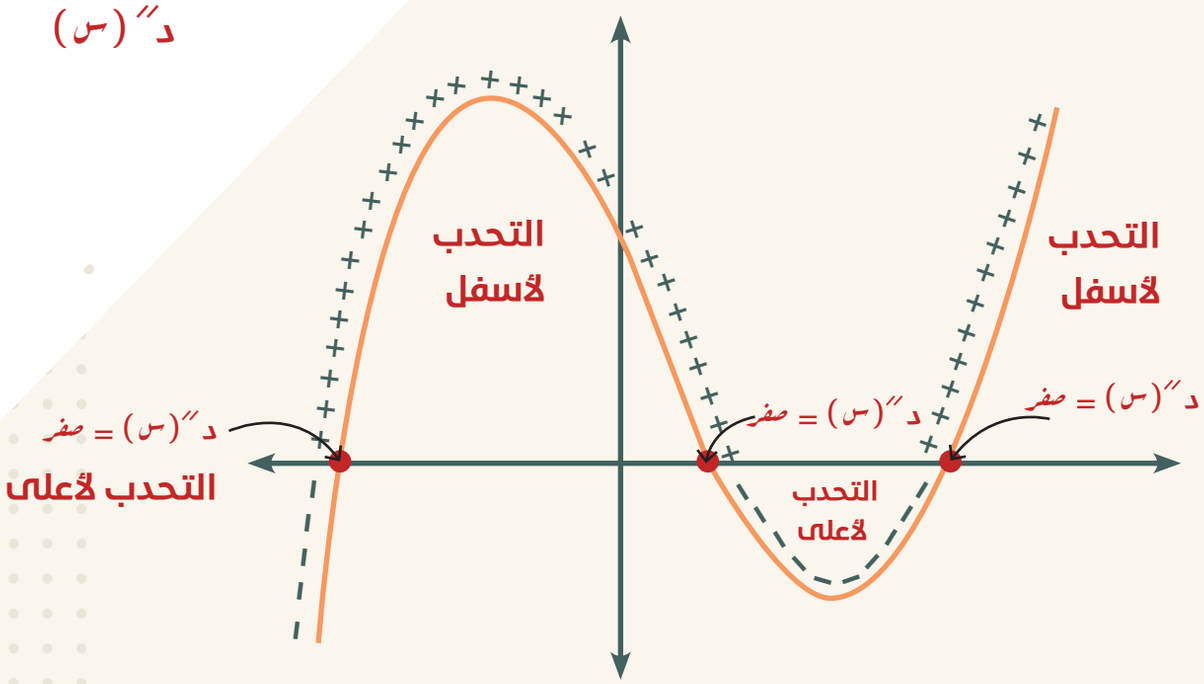
د ′(س) تزايد
د ″(س) > صفر
التحدب لأسفل

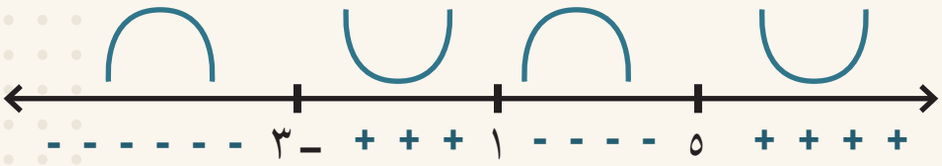
د ′(س) تناقص
د ″(س) < صفر
التحدب لأعلى



"ميل المماس للمشتقة الأولى هو يعبر عن المشتقة الثانية"

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK





د″(س) > صفر
د′(س) تزايد

د″(س) < صفر
د′(س) تناقص

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال

أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها = ٢٤ π سم^{٢}

الحل

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

المساحة الكلية = ٢ π نق^{٢} + ٢ π نق ع

ع = π نق^{٢} ع

ع = π نق نق ع

ع = π نق (١٢ − نق^{٢})

ع = ١٢ π نق − π نق^{٣}

ع$'$ = ١٢ π − ٣ π نق^{٢} = صفر

١٢ − ٣ نق^{٢} = صفر

١٢ = ٣ نق^{٢}

نق^{٢} = ٤ ⟹ نق = ٢

$\frac{٢}{٢}$ π نق^{٢} + $\frac{٢}{٢}$ π نق ع = $\frac{٢٤}{٢}$ π

نق^{٢} + نق ع = ١٢

نق ع = ١٢ − نق^{٢}

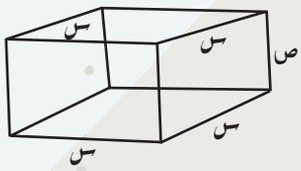
ع = ١٢ π × ٢ − π (٢)^{٣} = ٢٤ π − ٨ π = ١٦ π سم^{٣}

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال

أوجد أكبر حجم لصندوق على هيئة متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومساحة سطحه الكلية ٣٨٤ سم^{٢}

الحل



ع = س^{٢} ص

المساحة الكلية = س^{٢} + س^{٢} + ٤ س ص

س^{٢} + س^{٢} + ٤ س ص = ٣٨٤

٢ س^{٢} + ٤ س ص = ٣٨٤

س^{٢} + ٢ س ص = ١٩٢

٢ س ص = ١٩٢ − س^{٢} ⟵ س ص = $\frac{١}{٢}$ (١٩٢ − س^{٢})

∴ ع = س س ص

= $\frac{١}{٢}$ س (١٩٢ − س^{٢})

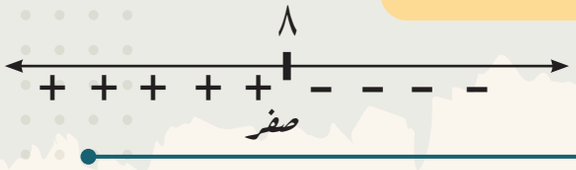
= ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٣}

ع$'$ = ٩٦ − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

= ٩٦ − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} = صفر ⟵ = ٩٦ = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} (× $\frac{٢}{٣}$)

∴ س^{٢} = ٦٤ ⟵ س = ٨

∴ ع = ٩٦ × ٨ − $\frac{١}{٢}$ × (٨)^{٣} = ٥١٢ سم^{٣}



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK